ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1980

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

(commune aux deux options)

Durée: 1 heure

Objet : Evaluation décimale à 10^{-5} près de la limite ℓ de la suite convergente

$$u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{3+4n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$

1°) Cette suite tend vers ℓ par valeurs alternativement supérieures et inférieures. Quel que soit n, ℓ est compris entre u_n et u_{n+1}. La largeur de cet intervalle est décroissante et tend vers zéro. Grâce à ces remarques chercher à partir de quelle valeur de n la différence entre u_n et ℓ serait sûrement inférieure à 10^{-5}.

2°) On fait appel à un procédé d'accélération de la convergence des suites qui conduit à remplacer u_n par une nouvelle suite v_n définie par la formule

$$\frac{1}{v_n - u_n} = \frac{1}{u_{n+1} - u_n} + \frac{1}{u_{n-1} - u_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Calculer $v_n - u_n$ en fonction de n et montrer que l'on peut écrire

$v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{a + bn}$, a et b étant deux entiers positifs à déterminer. Etablir ensuite la formule :

$$v_{n+1} - v_n = (-1)^n \frac{4}{(4n+5)\ (4n+7)\ (4n+9)}$$

Reconnaître que v_n a même limite que u_n et se rapproche de ℓ par valeurs alternativement supérieures et inférieures. Calculer par tâtonnements à partir de quelle valeur de n on aurait $\left| v_{n+1} - v_n \right| < 10^{-5}$ (Commencer les essais avec n = 15)

3°) On accélère la convergence de v_n comme on l'a fait pour u_n ce qui conduit à une troisième suite

$$w_n = u_n - (-1)^n \frac{16n^2 + 40n + 29}{(8n+10)\ (16n^2+40n+33)} \qquad (n = 2,3,4,\ldots)$$

formule que l'on admettra.

---/---

Reconnaître que w_n a la même limite ℓ que u_n et admettre qu'elle s'en rapproche par valeurs alternativement supérieures et inférieures, l'intervalle $|w_{n+1} - w_n|$ décroissant vers zéro.
Calculer w_4 et w_5. A-t-on la précision recherchée ?

4°) La question étant reprise d'une manière différente on établit la formule

$$\ell = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^{4/3}}$$

d'où, après transformations :

$$2\sqrt{2}\,\ell = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2+1} - \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

A partir de ces résultats que l'on admettra :

- Mettre la valeur numérique de ℓ sous la forme théorique la plus simple possible.
- En donner une évaluation décimale avec toute la précision des instruments dont on dispose.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail